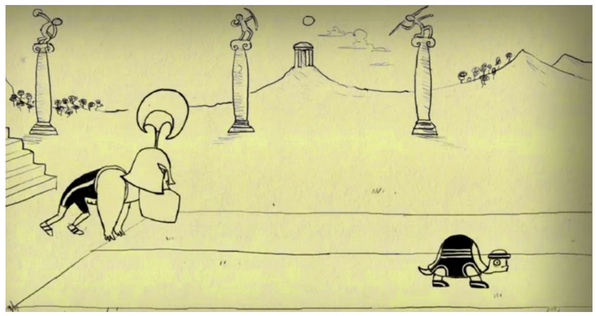
Achille e la Tartaruga

"Dal mito ai quanti"

F. Caporale

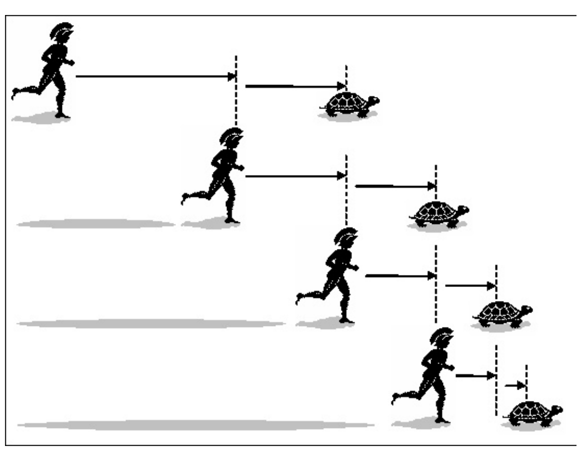


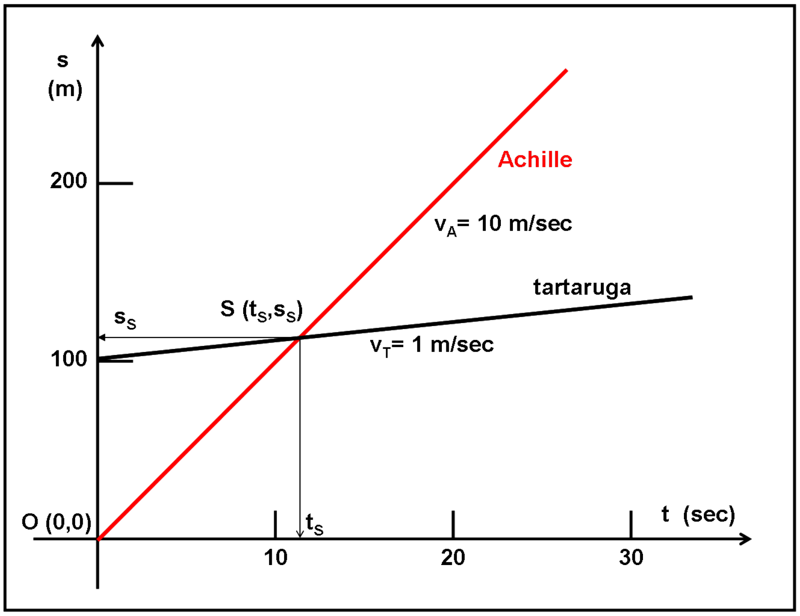
Si racconta che gli antenati delle tartarughe Ninja nacquero nell'antica Grecia ed erano tartarughe talmente forti e furbe che riuscivano ad ingannare perfino supereroi come Achille, l'invulnerabile eroe degli Achei che avrebbe vinto praticamente da solo la guerra di Troia se non l'avessero prima colpito nel suo unico punto debole.

Sembra assurdo ma un tale Zenone (V sec A.C.) - noto come filosofo greco, ma che tecnicamente era di Elea, vicino l'attuale Salerno - affermò con assoluta convinzione che in una gara di velocità, dando un piccolo vantaggio alla tartaruga, Achille il "piè veloce" (nonché bello, biondo, muscoloso e spaccone) non fu in grado di raggiungerla.

Questa storia è uno degli esperimenti mentali "paradossali" che il nostro filosofo mise in campo per difendere la dottrina parmenidea dell'unicità e dell'immobilità dell'essere, dimostrando come coloro che affermavano l'esistenza della molteplicità e del divenire si ritrovassero impantanati in evidenti contraddizioni.

L'argomento di Zenone era il seguente: se indichiamo con s_0 la posizione iniziale della tartaruga rispetto ad Achille, nel tempo in cui quest'ultimo impiega per percorrere il tratto s_0, la tartaruga nel frattempo sarà avanzata di una certa lunghezza s_1. Achille allora correrà per raggiungere la nuova posizione della tartaruga, ma quando avrà percorso questo tratto s_1, la tartaruga sarà ulteriormente avanzata di un tratto s_2 e così via.





1 Achille supera la tartaruga: cinematica

In sostanza, per Zenone, Achille non potrà mai raggiungere la tartaruga, perché ogni volta dovrà prima raggiungere la sua posizione, ma nel frattempo la tartaruga sarà già più avanti e questo processo è evidentemente infinito. Tuttavia, nonostante l'argomento di Zenone fosse apparentemente convincente, è ben noto che Achille raggiungerà e supererà in breve tempo la tartaruga. Oggi perfino un profano della scienza può aprire un libro di fisica elementare delle superiori e capire come risolvere questo semplice problema di cinematica. Nel grafico sono mostrati i diagrammi spazio-tempo per il caso concreto in cui $s_0 = 100m$, la velocità di Achille è $v_A = 10m/s$ e quella della tartaruga è $v_T = 1m/s$. È evidente che il sorpasso avverrà in corrispondenza del punto di intersezione dei due diagrammi lineari.
Il calcolo analitico dell'istante e del punto di incontro si fa banalmente utilizzando le leggi orarie del moto uniforme:

$$s_A(t) = v_A t\,, \qquad s_T(t) = s_0 + v_T t\,, \tag{1}$$

dove $s_A(t)$ ed $s_T(t)$ sono rispettivamente la posizione di Achille e quella della tartaruga in funzione del tempo.
La condizione di incontro è chiaramente $s_A(t_s) = s_T(t_s)$, dove t_s è l'istante del sorpasso che si ottiene usando le leggi orarie (1):

$$v_A t_s = s_0 + v_T t_s \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{s_0}{v_A - v_T}\,. \tag{2}$$

Sostituendo il valore di t_s in una delle due leggi orarie (1), si ottiene poi il valore della distanza s_s percorsa da Achille quando incontra e supera la tartaruga, ovvero:

$$s_s = \frac{s_0 v_A}{v_A - v_T}\,. \tag{3}$$

Se sostituiamo i valori dati dall'esempio in alto, si trova $t_s \simeq 11.1s$ e $s_s \simeq 111m$, che coincidono con le coordinate del punto di incontro che si vede nel grafico.

2 Dall'infinito al finito: il calcolo infinitesimale

Immaginiamo di tornare indietro ai tempi di Zenone e di raccontargli tutto ciò. Sicuramente riceveremmo il plauso dei suoi avversari del tempo, come Diogene di Siope che, per dimostrare che Zenone si sbagliava, liquidò la questione semplicemente alzandosi e camminando. Tuttavia, non riusciremmo a convincere Zenone, perché è innegabile che il suo ragionamento, secondo cui Achille e la Tartaruga restano "congelati" in questo eterno inseguimento, appare logicamente corretto. Infatti, sembra perfettamente plausibile che sommando un numero infinito di termini di una successione il risultato debba essere, a sua volta, infinito. Il fatto che i singoli termini siano ciascuno più piccolo del precedente non sembra alterare tale evidenza e per molti secoli la questione rimase fonte di dibattito tra filosofi e scienziati, senza arrivare ad una soluzione definitiva.

Finalmente, verso la fine del XVII secolo, qualcuno gettò le basi per lo sviluppo di una matematica nuova che risolse la questione in pochi passaggi: si tratta del calcolo infinitesimale, grazie al quale oggi sappiamo che la somma di infiniti elementi può anche essere finita. Uno dei suoi risultati è che la somma di infiniti termini del tipo

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots,$$

in cui $-1 < x < 1$, è una quantità finita pari a $1/(1-x)$, ovvero, scritto in modo più compatto

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,. \tag{4}$$

Questa somma infinita è nota come "serie geometrica"[1].
Torniamo adesso al ragionamento di Zenone: quando Achille, dopo un tempo s_0/v_A, avrà raggiunto la posizione s_0, inizialmente occupata dalla tartaruga, quest'ultima avrà percorso un tratto s_1, che corrisponderà al prodotto della sua velocità v_T per il tempo s_0/v_A. Quando Achille avrà percorso questo tratto s_1, la tartaruga sarà avanzata di un tratto s_2, pari al prodotto di v_T per il tempo s_1/v_A e così via.
Schematizziamo quanto detto qui di seguito:

Achille	**Tartaruga**
percorre s_0	percorre $s_1 = v_T \frac{s_0}{v_A} = s_0 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)$
percorre s_1	percorre $s_2 = v_T \frac{s_1}{v_A} = s_0 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2$
percorre s_2	percorre $s_3 = v_T \frac{s_2}{v_A} = s_0 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3$
percorre s_3	percorre $s_4 = v_T \frac{s_3}{v_A} = s_0 \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^4$
...	...

[1] Per la dimostrazione della formula (4) vedi appendice A.

Il valore della distanza s_s percorsa da Achille quando sorpassa la tartaruga dovrà quindi essere la somma infinita di tutti questi termini, cioè

$$\begin{aligned} s_s &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + \dots \\ &= s_0 + s_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right) + s_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + s_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3 + s_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^4 + s_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^5 + s_0\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^6 + \dots \\ &= s_0\left[1 + \left(\frac{v_T}{v_A}\right) + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3 + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^4 + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^5 + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^6 + \dots\right. \\ &= s_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n . \end{aligned} \tag{5}$$

Se confrontiamo questa espressione con la (4), notiamo subito che si tratta di una serie geometrica in cui $x = v_T/v_A$, che necessariamente è un numero positivo minore di 1. Pertanto, usando la formula (4) otteniamo

$$s_s = s_0 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^n = s_0 \cdot \frac{1}{1-\frac{v_T}{v_A}} = \frac{s_0 v_A}{v_A - v_T}\,, \tag{6}$$

che è un **risultato identico a quello dell'equazione (3)**, ottenuta utilizzando le semplici leggi del moto rettilineo uniforme.

Ciò che spiazzò Zenone - comprensibilmente, visto che gli antichi greci, anzi "magnogreci", non conoscevano il calcolo infinitesimale - furono in realtà due mancate considerazioni. La prima è che ciò che deve tendere ad infinito perché la distanza tenda a zero non è il tempo, altrimenti Zenone avrebbe ragione a dire che Achille non raggiungerà mai la tartaruga. In realtà, a tendere ad infinito è il numero di iterazioni del ragionamento, ma ad ogni iterazione non solo la distanza, anche il tempo necessario a coprirla diminuisce sempre più.

Insomma, ogni volta l'iterazione diventa più breve e più veloce e, in buona sostanza, alla fine (all'infinito) giungeremo al punto in cui la tartaruga rimane dov'è e Achille la raggiunge in tempo zero. È proprio questo il secondo punto su cui Zenone si incaglia: la categoria dell'infinito e dell'infinitesimo; come già detto, Zenone non aveva gli strumenti matematici per comprenderlo e in fondo tutta la sua teoria si basava sul fatto che "l'infinito" non esiste nel mondo sensibile. È un errore che gli studenti di analisi matematica commettono ancora oggi: l'infinito non è "tanto", non "tantissimo", è "infinito". Un miliardo di miliardi di zeri che seguono l'unità rappresentano un numero molto grande, ma l'infinito non è "più di quel numero", è proprio tutta un'altra cosa, è una quantità senza limite, anzi non è neanche una quantità. Lo stesso vale per l'infinitesimo, che non è "piccolissimo", è infinitamente piccolo. Finché l'iterazione del paradosso di Achille rimane nel finito, Achille dovrà sempre ancora coprire una piccolissima distanza. Il paradosso si supera quando le iterazioni diventano infinite e il distacco tra i concorrenti diventa infinitesimo.

3 Zenone aveva ragione: il principio di indeterminazione

Torniamo però a riflettere sul concetto di "tempo che scorre", che è la chiave del movimento così come lo concepiamo utilizzando il buon senso. Il tempo va avanti, sempre, indipendentemente dal fatto che lo suddividiamo artificialmente in intervalli sempre più piccoli. È vero che quando si risolvono problemi di fisica si visualizza il tempo come una linea statica che si può suddividere indefinitamente, ma il punto cruciale è che il modo in cui percepiamo il tempo non è questo. Non possiamo guardare il tempo fuori dal suo scorrere: il tempo scorre, e quindi il moto esiste.

L'idea che il tempo possa "fluire", tuttavia, viene distrutta dalla **teoria della relatività**, che insegna che forse non è il caso di congedare il paradosso in maniera tanto arrogante. Secondo Einstein, il tempo in effetti si può considerare in modo simile allo spazio: infatti, nella teoria della relatività, alla fin fine, lo scorrere del tempo è solo un'illusione, e se lo è, il moto sarà anch'esso un'illusione. Tuttavia, non bisogna dimenticare che le idee di Einstein diventano manifeste solamente quando ci si avvicina alla velocità della luce; alle velocità normali, di tutti i giorni, siamo perfettamente autorizzati a ignorare gli effetti relativistici e pensare al tempo e allo spazio nel modo solito.
D'altra parte, è anche profondamente sbagliato, da un punto di vista fisico, dire che il tempo e lo spazio si possono suddividere in intervalli discreti sempre più piccoli, perché si raggiungerebbero dimensioni in cui entra in gioco la **fisica quantistica**; a questa scala microscopica il tempo e lo spazio diventano essi stessi confusi e indefinibili, e non ha veramente più senso suddividerli in parti più piccole. In verità, il moto stesso diventa un po' illusorio nel dominio quantistico degli atomi e delle particelle subatomiche. Ma non è certo ciò che Zenone aveva in mente.

Non è mia intenzione introdurre concetti di meccanica quantistica in modo completo e rigoroso, ma vorrei dare soltanto qualche "input" per stimolare la curiosità e far capire come questi paradossi siano stati utili per sviluppare molti concetti alla base della matematica e della fisica moderne, motivo per cui non si dovrebbe liquidarli banalmente.

La chiave di volta, che sconvolge la visione "classica" del mondo, è il **principio di indeterminazione di Heisenberg** che, nella sua formulazione più nota esprime il fatto che non è possibile determinare con precisione arbitraria sia la posizione che la quantità di moto (prodotto della massa per la velocità) di una particella. In altri termini, se cerchiamo di determinare dove si trova esattamente una particella ci sfuggirà sempre di più la comprensione del suo moto e viceversa. Questo concetto si può semplificare pensando a come, in linea di principio, si potrebbe misurare la posizione di una particella così piccola da sfuggire all'osservazione ad occhio nudo. Se si avesse a disposizione un microscopio "ideale", sempre più potente, si potrebbe pensare di individuarne la posizione con sempre maggiore precisione. Tuttavia, cos facendo, sarebbe necessario illuminare la particella con un fascio di luce e, necessariamente, dato che la luce porta energia ed impulso (quantità di moto), la nostra particella riceverebbe una piccola spinta che cambierebbe il suo stato di moto. Più si illumina la particella con potenti microscopi, più si cambia la sua quantità di moto, cioè la sua velocità, e meno si può determinare la sua velocità di partenza. In altre parole le misure della posizione e dell'impulso comportano un'indeterminazione complessiva. Il principio di indeterminazione, quindi, da un punto di vista concettuale, significa che l'osservatore non può mai essere considerato un semplice spettatore, ma che il suo intervento, nel misurare le cose, produce degli effetti non calcolabili e, dunque, un'indeterminazione che non si può eliminare.

È l'osservatore, quindi, che gioca un ruolo cruciale in questa nuova visione del mondo nata nella prima metà del secolo scorso, perché "l'osservazione altera lo stato di un sistema" e non tutte le grandezze fisiche caratterizzanti il fenomeno possono essere determinate contemporaneamente. Quindi se indichiamo con Δx l'indeterminazione sulla posizione e Δp l'indeterminazione sulla quantità di moto (considerando per semplicità un moto unidimensionale), il principio si può esprimere tramite la relazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\,, \tag{7}$$

dove $\hbar \simeq 1.05 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ è una delle costanti fondamentali che esistono in natura nota come la costante di Planck ridotta (cioè divisa per 2π). È l'azione[2] minima dell'universo e, se vogliamo, essa rappresenta un limite inferiore alla suddivisione del "reale" in termini di spazio-tempo ed energia. Di conseguenza la realtà non è più continua, infinitamente divisibile, ma "finemente discretizzata".

È davvero sorprendente, dopo duemilacinquecento anni, scoprire che nel mondo un po' folle della meccanica quantistica non c'è una risposta sensata ("reale") per Zenone: nel mondo subatomico non esiste il concetto di traiettoria di una particella, non è necessario pensare che ci siano entità che esistono e si comportano in maniera determinata, non è necessario pensare che esista il movimento. Però, bisogna anche fare attenzione a non cadere nelle acque torbide della metafisica o, addirittura, a trasformare la fisica in misticismo. Come affermava Richard Feynman, "il fatto che non possiamo misurare esattamente posizione e quantità di moto non significa che noi **non possiamo** parlare di traiettoria, piuttosto significa che **non abbiamo bisogno** di parlarne".

[2]In fisica l'azione è tutto ciò che dimensionalmente è il prodotto di un'energia per un tempo, come una distanza per una quantità di moto o un momento angolare. Esiste una formulazione della meccanica basata sul **principio di minima azione**[5].

A La serie geometrica

In questa appendice matematica si vuole ricavare la formula (4), la cui dimostrazione è stata omessa nel testo per non appesantire i contenuti nella sezione.
La somma S della serie geometrica, ovvero

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,, \tag{A.1}$$

è il limite della successione delle somme parziali s_k, $k \in \mathbb{N}$, così definita:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k \,, \tag{A.2}$$

quando k tende a infinito, cioè

$$S = \lim_{k\to\infty} s_k \,. \tag{A.3}$$

Consideriamo ora la (A.2) e moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $1 - x$:

$$\begin{aligned} (1-x)s_k &= (1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k) \\ &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - .... - x^{k+1} \\ &= 1 - x^{k+1} \,, \end{aligned} \tag{A.4}$$

per cui si ottiene che il termine k-esimo della successione di somme parziali è

$$s_k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} \,. \tag{A.5}$$

Adesso per ottenere la somma della serie non resta che calcolare il limite della successione per k che tende a infinito. Nel caso in cui $|x| < 1$, risulta banalmente che

$$S = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \,. \tag{A.6}$$

Come ulteriore verifica il lettore può eseguire uno sviluppo in serie di Mclaurin della funzione $f(x) = 1/(1 - x)$ e, per $|x| < 1$, ottenere immediatamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Riferimenti bibliografici

[1] W. Weischedel, *La filosofia dalla scala di servizio*, R. Cortina (1996).

[2] J.A. Khalili, *La fisica del diavolo. Maxwell, Schroedinger, Einstein e i paradossi del mondo*, Bollati Boringhieri (2012).

[3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley (1965).

[4] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1994).

[5] L. D. Landau, E.M. Lifshits, *Meccanica*, Mir (1982).

[6] https://it.wikipedia.org.

[7] F. Caporale, *Appunti personali.*