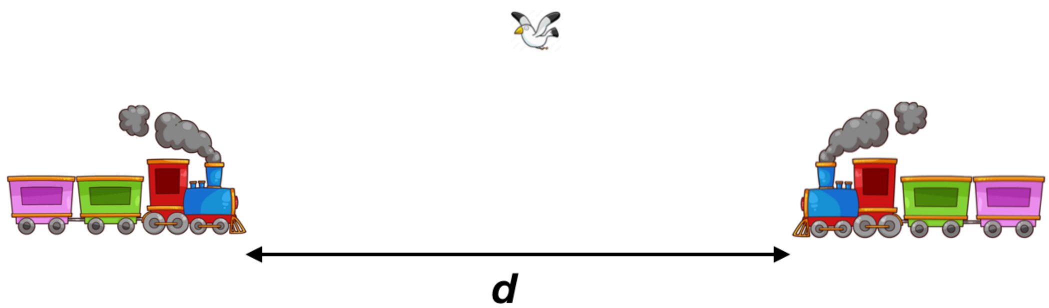
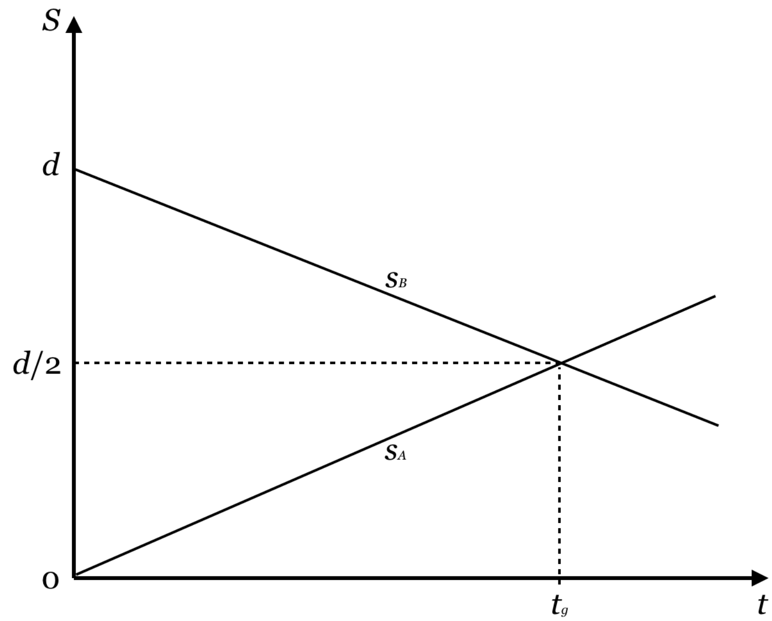
Due treni e un gabbiano

Isabella Chiti

Relatore: F. Caporale



Immaginiamo due treni che viaggiano l'uno contro l'altro alla medesima velocità e che, ad un certo istante, un gabbiano inizi a volare tra un treno e l'altro. Fin qui nulla di strano.
Il gabbiano, però, non solo è capace di volare molto più rapidamente dei due treni, ma è anche così scattante che, una volta posatosi su un treno, inverte immediatamente il suo moto per volare, sempre alla massima velocità possibile, verso l'altro treno.
Ci chiediamo, quindi, conoscendo la distanza iniziale a cui si trovano i due treni quando il gabbiano inizia a volare, **quanti voli** riuscirà ad eseguire prima dello scontro e quale sarà lo **spazio complessivo percorso** in volo dal gabbiano.
Prima di prendere carta e penna e scrivere le nostre equazioni di cinematica, fermiamoci un attimo ad immaginare ciò che accade: nel suo "saltellare" tra un treno e l'altro, il gabbiano sarà sempre capace, in teoria, di raggiungere il treno che ha davanti prima che i due treni collidano. Anche quando la distanza relativa tra i due treni diventa piccolissima, il pennuto riuscirà comunque a raggiungere l'altro treno prima dello scontro.
Se ci pensiamo bene, questo processo, non sembra avere una fine. Il numero dei voli del gabbiano deve essere **infinito**!
Questo problema ci ricorda, evidentemente, i paradossi del filosofo greco Zenone, come quello famoso di Achille e la tartaruga.
È più che evidente che una situazione simile non potrebbe mai avvenire nella realtà. Dove si trova, quindi, l'inghippo del nostro ragionamento?
Riflettendoci un attimo, ciò che è pura astrazione è l'ipotesi dell'inversione istantanea del moto. Affinchè ciò avvenga, in corrispondenza di ogni salto l'accelerazione del gabbiano dovrebbe essere infinita e chiaramente ciò contraddice le leggi fondamentali della natura.
Ad ogni modo, possiamo accettare che l'esperimento sia "mentale" e procedere con la soluzione della seconda parte del problema.



1 Un semplice approccio cinematico

Affrontiamo il problema partendo dalle leggi orarie che descrivono i moti dei due treni:

$$\begin{cases} s_A(t) = v_t t \\ s_B(t) = d - v_t t \end{cases}$$

dove $s_A(t)$ ed $s_B(t)$ esprimono rispettivamente le posizioni del primo e del secondo treno in funzione del tempo, che possono essere rappresentate graficamente nel diagramma spazio-tempo in alto.

I due treni si scontreranno chiaramente quando $s_A = s_B$, ovvero nell'istante t_s che si ottiene dall'uguaglianza delle due leggi orarie

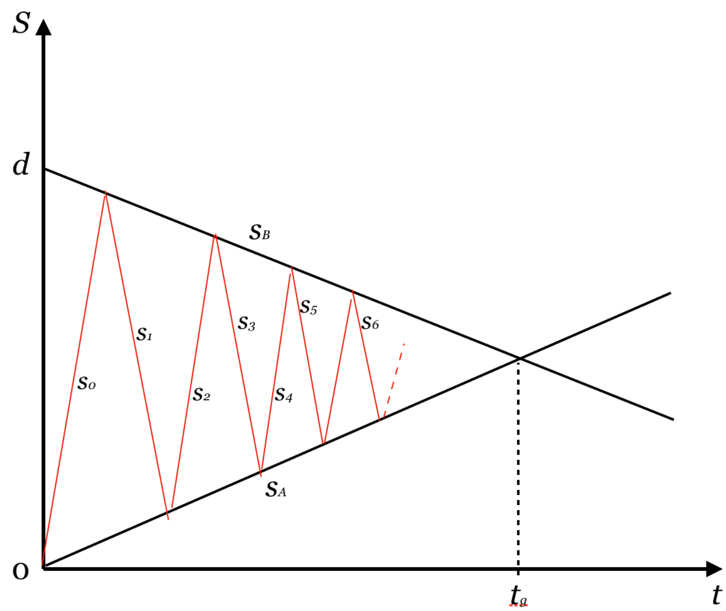
$$v_t t_s = d - v_t t_s \, ,$$

da cui si ottiene facilmente che

$$t_s = \frac{d}{2v_t} \, .$$

Naturalmente, t_s corrisponde anche al tempo che ha avuto a disposizione il gabbiano per volare tra un treno e l'altro. Pertanto, lo spazio totale s_{tot} che ha percorso si ottiene moltiplicando t_s per la sua velocità:

$$\boxed{s_{tot} = \frac{v_g d}{2v_t}} \tag{1}$$



2 Una somma infinita di voli

Il problema sembra di semplice soluzione, ma la descrizione "alla Zenone" ci lascia ancora un po' perplessi. Ci chiediamo, cioè, se sia possibile ottenere la soluzione (1) del paragrafo precedente sommando tutti i contributi (infiniti!) determinati dai singoli voli del gabbiano, così come indicato nella figura in alto.
Consideriamo il primo volo e indichiamo con t_0 il tempo che impiega il gabbiano per raggiungere il treno B partendo dal treno A, quando la distanza iniziale tra i due misura d. Indicando lo spazio percorso in questo primo tratto con s_0, naturalmente si ha

$$t_0 = \frac{s_0}{v_g} \, .$$

D'altra parte, il tratto s_0 si può ottenere sottraendo dalla distanza iniziale tra i due treni lo spazio percorso dal treno B nel tempo t_0, cioè

$$s_0 = d - v_t t_0.$$

Combinando le due relazioni si ha

$$s_0 = d - v_t \cdot \left(\frac{s_0}{v_g} \right) \, ,$$

da cui, con un po' di algebra elementare, si ottiene facilmente che

$$s_0 = d \cdot \left(\frac{v_g}{v_g + v_t} \right) \, . \tag{2}$$

Consideriamo ora il volo di ritorno e indichiamo questo tratto con s_1. Analogamente al caso precedente, il tempo di volo corrispondente sarà $t_1 = s_1/v_g$. Si ha che

$$s_1 = s_0 - v_t t_0 - v_t t_1 \, ; \tag{3}$$

infatti il tratto percorso nel secondo volo sarà dato dalla differenza tra il primo tratto s_0 e la somma dei contributi dovuti allo spostamento del treno A nel tempo t_0 (andata) e nel tempo t_1 (ritorno). Combinando nuovamente le ultime due relazioni otteniamo:

$$s_1 = s_0 - v_g \cdot \left(\frac{s_0}{v_g}\right) - v_g \cdot \left(\frac{s_1}{v_g}\right) ,$$

da cui, risolvendo rispetto ad s_1, dopo alcuni semplici passaggi algebrici otteniamo

$$s_1 = s_0 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right) . \tag{4}$$

A questo punto è facile iterare il precedente ragionamento al volo successivo, per cui, analogamente a quanto scritto nella (3), lo spazio percorso s_2 corrispondente sarà dato da

$$s_2 = s_1 - v_t t_1 - v_t t_2 .$$

Sostituendo ora in quest'ultima la relazione $t_2 = s_2/v_g$ e quella nota per t_1 si ottiene

$$s_2 = s_1 - v_g \cdot \left(\frac{s_1}{v_g}\right) - v_g \cdot \left(\frac{s_2}{v_g}\right) \quad \longrightarrow \quad s_2 = s_1 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right) ,$$

e, sostituendo al posto di s_1 l'espressione (4), si ottiene

$$s_2 = s_0 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right)^2 . \tag{5}$$

Procedendo ancora con il seguente volo è facile ricavare che il tratto percorso corrispondente sarà

$$s_3 = s_2 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right) = s_0 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right)^3 .$$

Pertanto per l'n-esimo volo si ottiene il contributo ricorsivo

$$s_n = s_0 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right)^n . \tag{6}$$

Lo spazio totale percorso si ottiene quindi con la somma infinita di tutti i contributi dei singoli voli, cioè

$$s_{tot} = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} s_n ,$$

ovvero, usando la (6), si ha

$$s_{tot} = \sum_{n=0}^{\infty} s_0 \cdot \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right)^n = s_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}\right)^n . \tag{7}$$

A questo punto, per risolvere l'ultimo scoglio del problema (una somma infinita!), chiamiamo in causa il calcolo infinitesimale che, a differenza di quanto sosteneva Zenone diversi secoli prima della sua nascita, ci permette di affermare che la somma di un numero infinito di termini può dare un risultato finito. In particolare si dimostra che

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,, \tag{8}$$

a patto che $|x| < 1$. Questa serie (ovvero somma infinita) di potenze si chiama serie geometrica. Applicando la formula (8) alla nostra equazione (7) otteniamo pertanto

$$s_{tot} = s_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}}\,.$$

Sostituendo, infine, l'espressione (2) per s_0 si ottiene

$$s_{tot} = d \cdot \left(\frac{v_g}{v_g + v_t}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{v_g - v_t}{v_g + v_t}}\right) = d \cdot \left(\frac{v_g}{v_g + v_t}\right) \cdot \left(\frac{v_g + v_t}{2v_t}\right)\,,$$

cioè

$$\boxed{s_{tot} = \frac{v_g d}{2v_t}}$$

che è lo stesso risultato (1) ottenuto con il semplice ragionamento sviluppato nel primo paragrafo. Pertanto anche questo apparente paradosso alla "Zenone" è stato risolto con il complesso ma elegante approccio del calcolo infinitesimale.